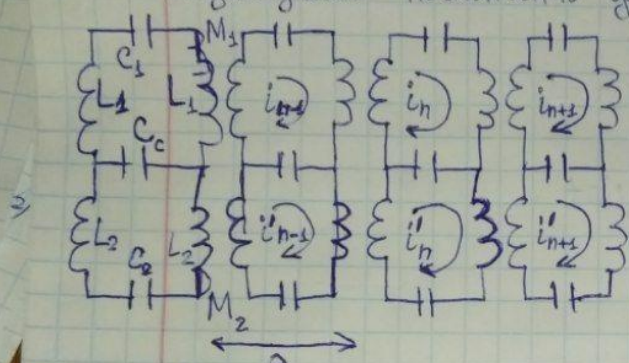


3.4.2 Зв'язок між хвилями з однаковими знаками дисперсії.

Розглядаємо нескінченно довгу ланцюжкову систему



при $C_c \rightarrow \infty$, реактивний опір $X_c = \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0$ і

система розпадається на два ізольовані ланцюжки.

Тому їх можна розглядати як зв'язані ~~лінії~~ ^{лінії}.

Знайдемо рівняння для n -ї ланки з допомогою II закону Кірхгофа (алгебраїчна сума напруг всіх віток, які належать замкненому контуру, дорівнює нулю).

~~$2L \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_n$~~ для L : $U = L \left(\frac{di}{dt} \right)$

для C : $U = \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow$

$$2L_1 \frac{d^2 i_n}{dt^2} + i_n \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_c} \right) + M_1 \left(\frac{d^2 i_{n-1}}{dt^2} + \frac{d^2 i_{n+1}}{dt^2} \right) - \frac{1}{C_c} i'_n = 0$$

$$2L_2 \frac{d^2 i'_n}{dt^2} + i'_n \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_c} \right) + M_2 \left(\frac{d^2 i'_{n-1}}{dt^2} + \frac{d^2 i'_{n+1}}{dt^2} \right) - \frac{1}{C_c} i_n = 0$$

Розв'язуємо за допомогою підстановки для гармонічної хвилі, що біжить уздовж ланцюжка.

$$i_n = I_m \exp(i\omega t - i k n a); \quad i'_n = I'_m \exp(i\omega t - i k n a)$$

$$i_n = \gamma_m \exp(i\omega t - i k n a)$$

$$i_{n-1} = \gamma_m \exp(i\omega t - i k a (n-1)) = \gamma_m \exp(i\omega t - i k n a) \exp(i k a)$$

$$i_{n+1} = \gamma_m \exp(i\omega t - i k n a) \exp(-i k a)$$

$$\frac{d^2 i_n}{dt^2} = \gamma_m i^2 \omega^2 \exp(i\omega t - i k n a)$$

$$\frac{d^2 i_{n-1}}{dt^2} = \gamma_m i^2 \omega^2 \exp(i\omega t - i k n a) \exp(i k a)$$

$$\frac{d^2 i_{n+1}}{dt^2} = \gamma_m i^2 \omega^2 \exp(i\omega t - i k n a) \exp(-i k a)$$

$$2L_1 \gamma_m (-\omega^2) e^{i\omega t - i k n a} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_c} \right) \gamma_m e^{i\omega t - i k n a} + M_2 (\gamma_m (-\omega^2) \exp(i\omega t - i k n a) \cdot (\exp(i k a) + \exp(-i k a))) - \frac{1}{C_c} \gamma_m \exp(i\omega t - i k n a) = 0 \quad | : 2L_1; : e^{i\omega t - i k n a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos k a = \frac{e^{i k a} + e^{-i k a}}{2} \Rightarrow |2 \cos k a| \Rightarrow \left| \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2L_{1,2}} \left(\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_c} \right) \right| \Rightarrow$$

$$\left| \beta_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{L_{1,2}} ; \nu_{1,2}^2 = \frac{1}{2L_{1,2} C_c} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 \gamma_m + \omega_{01}^2 \gamma_m - \beta_1 \omega^2 \gamma_m \cos k a - \nu_1^2 \gamma'_m = 0 \\ -\omega^2 \gamma'_m + \omega_{02}^2 \gamma'_m - \beta_2 \omega^2 \gamma'_m \cos k a - \nu_2^2 \gamma_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_{01}^2 - \beta_1 \omega^2 \cos k a) \gamma_m - \nu_1^2 \gamma'_m = 0 \\ -\nu_2^2 \gamma_m + (-\omega^2 + \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega^2 \cos k a) \gamma'_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_{01}^2 - \beta_1 \omega^2 \cos k a) \gamma_m - \nu_1^2 \gamma'_m = 0 \\ -\nu_2^2 \gamma_m + (-\omega^2 + \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega^2 \cos k a) \gamma'_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_{01}^2 - \beta_1 \omega^2 \cos k a) \gamma_m - \nu_1^2 \gamma'_m = 0 \\ -\nu_2^2 \gamma_m + (-\omega^2 + \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega^2 \cos k a) \gamma'_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + \omega_{01}^2 - \beta_1 \omega^2 \cos k a) & -\nu_1^2 \\ -\nu_2^2 & (-\omega^2 + \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega^2 \cos k a) \end{vmatrix} = 0$$

Отримуємо біквадратне рівняння щодо частоти та квадратне щодо $\cos(ka)$: $[\omega^2(1+\beta_1 \cos ka) - \omega_{01}^2][\omega^2(1+\beta_2 \cos ka) - \omega_{02}^2] - \gamma_1^2 \gamma_2^2 = 0$
 Можемо розв'язати аналітично:

В) 1) За відсутності зв'язку між лініями ($C \rightarrow \infty, \gamma_{1,2} = 0$)

Рівняння перетворюється на добуток двох дисперсійних рівнянь

Можемо визначити $\omega_{1,2}^2 \Rightarrow \omega_{1,2}^2(1+\beta_{1,2} \cos ka) - \omega_{01,02}^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01,02}^2}{1+\beta_{1,2} \cos ka}$$

При деякому підборі параметрів криві ω_1 та ω_2 перетинаються в деяких точках, так звані точки синхронізму, де $\tilde{\omega}_1(\tilde{k}) = \tilde{\omega}_2(\tilde{k})$

$$\text{або } \frac{\omega_{01}^2}{1+\beta_1 \cos ka} = \frac{\omega_{02}^2}{1+\beta_2 \cos ka}$$

Для точок синхронізму можемо знайти $\cos(\tilde{k}a)$ та $\tilde{\omega}^2$

$$\frac{\omega_{01}^2}{1+\beta_1 \cos ka} = \frac{\omega_{02}^2}{1+\beta_2 \cos ka}$$

$$\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \beta_2 \cos ka = \omega_{02}^2 + \omega_{02}^2 \beta_1 \cos ka$$

$$\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 = \beta_1 \cos ka \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2 \cos ka$$

$$\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 = \cos ka (\omega_{02}^2 \beta_1 - \omega_{01}^2 \beta_2)$$

$$\cos(\tilde{k}a) = (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) / (\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2)$$

Оскільки $\tilde{\omega}_1(\tilde{k}) = \tilde{\omega}_2(\tilde{k})$, знайдемо $\tilde{\omega}$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_{02}^2}{1+\beta_2 \cos(\tilde{k}a)} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{\omega_{02}^2} + \frac{\beta_2 \cos ka}{\omega_{02}^2} = \frac{1}{\omega_{02}^2} +$$

$$+ \frac{\beta_2 \omega_{01}^2 - \beta_2 \omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 (\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2)} = \frac{\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2 + \beta_2 \omega_{01}^2 - \beta_2 \omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 (\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2)} =$$

$$= \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2} \Rightarrow \tilde{\omega} = \frac{\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2}{\beta_1 - \beta_2}$$

2) За наявності зв'язку

$$[\omega^2(1+\beta_1 \cos ka) - \omega_{o1}^2][\omega^2(1+\beta_2 \cos ka) - \omega_{o2}^2] - v_1^2 v_2^2 = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = X}$$

$$X^2(1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka) - X\omega_{o2}^2(1+\beta_1 \cos ka) - X\omega_{o1}^2(1+\beta_2 \cos ka) + \omega_{o1}^2 \omega_{o2}^2 - v_1^2 v_2^2 = 0$$

$$\underbrace{X^2(1+m)(1+n)}_{aX^2} - \underbrace{X(\omega_{o1}^2(1+n) + \omega_{o2}^2(1+m))}_{bX} + \underbrace{(\omega_{o1}^2 \omega_{o2}^2 - v_1^2 v_2^2)}_{c} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (\omega_{o1}^2(1+\beta_2 \cos ka) + \omega_{o2}^2(1+\beta_1 \cos ka))^2 + 4v_1^2 v_2^2 \cdot (1+\beta_2)(1+\beta_1)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(\omega_{o1}^2(1+\beta_2 \cos ka) + \omega_{o2}^2(1+\beta_1 \cos ka)) \pm \sqrt{D}}{2(1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka)}$$

Перший доданок у точці синхронізації буде нуль, другий доданок пропорційний параметру зв'язку $v_1^2 v_2^2$.

Далеко від точки синхронізму, де

$$(\omega_{o1}^2(1+\beta_2 \cos ka) - \omega_{o2}^2(1+\beta_1 \cos ka))^2 \gg 4v_1^2 v_2^2 (1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka)$$

наближеність зв'язку майже не впливає на вигляд дисперсійних кривих: $\omega_{1,2} \approx \tilde{\omega}_{1,2}$.

В околі точки синхронізму, де

$$(\omega_{o1}^2(1+\beta_2 \cos ka) - \omega_{o2}^2(1+\beta_1 \cos ka))^2 \ll 4v_1^2 v_2^2 (1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka)$$

буде ефект розитовхування кривих

$$\omega_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{o1}^2}{1+\beta_1 \cos ka} + \frac{\omega_{o2}^2}{1+\beta_2 \cos ka} \right) \pm \frac{\sqrt{4v_1^2 v_2^2 (1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka)}}{2(1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka)}$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot 2\tilde{\omega}^2 \pm \frac{v_1 v_2}{\sqrt{(1+\beta_2 \cos ka)(1+\beta_1 \cos ka)}} \approx \tilde{\omega}^2 \left(1 \pm \frac{v_1 v_2}{\omega_{o1} \omega_{o2}} \right)$$

Враховано, що в околі синхронізму виконані співвідношення (1) та (2).

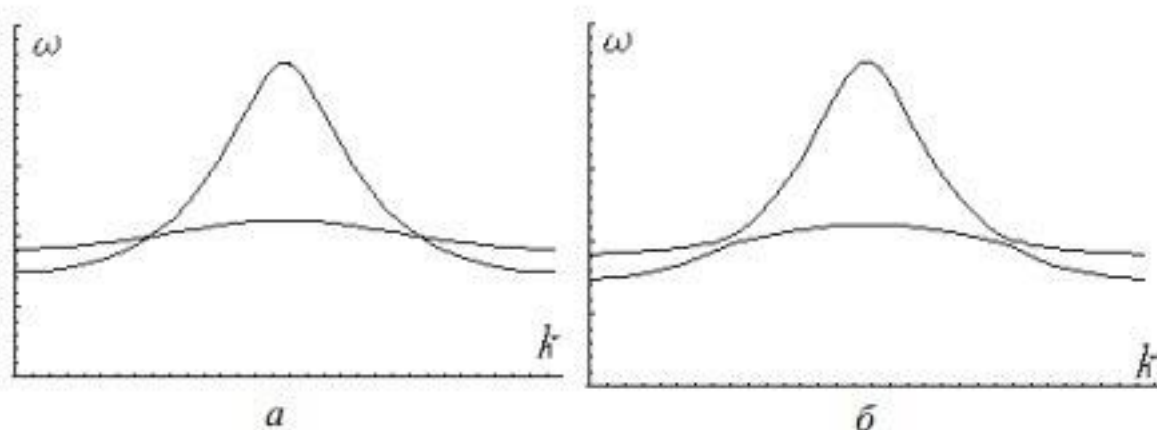


Рис.3.3.5. Дисперсійні криві для зв'язаних ланцюжків, поданих на рис.3.3.4, за відсутності зв'язку (а) та за наявності слабкого зв'язку (б).

Як у випадку зв'язку між лініями без дисперсії, між хвилями у верхній та нижній частинах ланцюжка відбуватиметься періодичний у просторі обмін енергією. Цим і обумовлюється формальне існування двох різних значень частоти, що виникають в околі точки синхронізму внаслідок появи зв'язку. Розштовхування дисперсійних кривих, що призводить до періодичного в просторі обміну енергією між хвилями - це, ефект, який завжди виникає за наявності зв'язку між хвилями з однаковим знаком дисперсії.